Corrigé du CT Méca des Solides
Mai 2016

Partie I

1) DDL : θ et ω

2) Actions extérieures : – Actions de contact de l'axe (Oz) → Pendule équ

– Forces de pesanteur terrestre ; Force unique $\vec{P} = (M+m)\vec{g}$ appliquée au centre de masse G du système.

3) Inconnues : θ, ω, Actions de contact en O : $\vec{R}_O$

4) 3 inconnues → 3 équations nécessaires.

Partie II – Aspects cinétiques.

5) – Centre de masse : $(M+m)\vec{OG} = m\vec{OA} + M\vec{OC}$

$$\boxed{\vec{OG} = \frac{m}{M+m}\frac{l}{2}\vec{e_\rho} + \frac{M}{M+m}\, l\,\vec{e_\rho}}$$

où $\vec{e_\rho} = \frac{\vec{OC}}{\|\vec{OC}\|}$, vecteur de la base cylindrique $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

6) $\vec{P} = (M+m)\vec{V}_{G/R}$ ou $\vec{P} = m\vec{V}_{(A\in T/R)} + M\vec{V}_{(C\in T/R)}$

$$= m\frac{l}{2}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + Ml\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

soit $\boxed{\vec{P} = \left(\frac{m}{2} + M\right) l\dot{\theta}\vec{e_\theta}}$

7) • $\vec{L}_O(T) = [I_O(T)]\,\vec{\Omega}_{T/R}$ car T possède 1 pt fixe O

Avec (Oz) = axe de sym. de révolution → axe principal

→ $\underline{\underline{\vec{L}_O(T)}} = I_{Oz}(T)\,\dot{\theta}\,\vec{e_z} = \underline{\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\vec{e_z}}$

• $\vec{L}_O(D) = \vec{L}^*(D) + \vec{OC}\wedge M\vec{V}_{C/R}$: Th. de Koenig

avec $\vec{L}^*(D) = [I_C(D)]\cdot\vec{\Omega}_{D/R} = \frac{Mr^2}{2}\cdot\omega\vec{e_z}$

et $\vec{OC}\wedge M\vec{V}_{C/R} = l\vec{e_\rho}\wedge Ml\dot{\theta}\vec{e_\theta} = Ml^2\dot{\theta}\vec{e_z}$

Soit $\boxed{\vec{L}_O(D) = \left(\frac{Mr^2}{2}\omega + Ml^2\dot{\theta}\right)\vec{e_z}}$

donc $\boxed{\vec{L}_O(T+D) = \left[\frac{ml^2}{3}\dot{\theta} + M\left(\frac{r^2}{2}\omega + l^2\dot{\theta}\right)\right]\vec{e}_z}$

Partie III :

8. $\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} + \vec{v}_{O'/R} \wedge \vec{P}_{(T+D)/R} = \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\Sigma \vec{F}_{ext})$

→ il est plus judicieux d'appliquer le TMC en O pour éliminer les actions de contact inconnues et O est aussi un pt fixe.

9. a) $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P}_D$ en C $+ \vec{T}_C$ en C (actions de contact)

$\vec{P}_D = M\vec{g}$

b) $\vec{\mathcal{M}}_C(\Sigma \vec{F}_{ext}) = \vec{0}$ puisque forces appliquées en C.

c) $\left(\frac{d\vec{L}_C}{dt}\right)_R = \Sigma \vec{\mathcal{M}}_{C,ext} = \vec{0}$ avec $\vec{L}_C = [I_C(D)]\vec{\Omega}_{D/R}$

soit $\vec{L}_C = \frac{Mr^2}{2}\omega\vec{e}_z$

d'où : $\boxed{\frac{Mr^2}{2}\dot{\omega} = 0}$, $\boxed{\omega = cte}$

10. $\frac{d\vec{L}_O}{dt}(T+D) = \vec{\mathcal{M}}_{O,ext} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_{D+T}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}_O)$

$= \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_{D+T})$

$= \vec{OG} \wedge (M+m)\vec{g}$

$= \left(m\frac{l}{2} + Ml\right)\vec{e}_r \wedge g\vec{e}_x$

$= \left(m\frac{l}{2} + Ml\right)(-\sin\theta)g\vec{e}_z$

avec $\vec{L}_O = \left(\frac{Mr^2}{2}\omega + Ml^2\dot{\theta}\right)\vec{e}_z$ → $\left.\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_R = \left(Ml^2\ddot{\theta} + \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}\right)\vec{e}_z$

→ Eq. diff : $\ddot{\theta} + g\frac{ml/2 + Ml}{Ml^2 + \frac{ml^2}{3}}\sin\theta = 0$

soit $\boxed{\ddot{\theta} + g/l\,\frac{m/2 + M}{m/3 + M}\sin\theta = 0}$

Petits mvts : $\sin\theta \sim \theta \rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$

avec $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ et $\omega_0 = \left(g/\ell \cdot \frac{M + m/2}{M + m/3} \right)^{1/2}$

11. Lorsque $m \ll M \rightarrow$ on retrouve le pendule simple avec

$\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$

Partie IV : Aspects énergétiques

12. $E_p = -(M+m)\vec{g} \cdot \vec{OG} + c^{te}$

$= -(M+m) g \vec{e}_x \cdot \left(\frac{m\ell/2 + M\ell}{M+m} \right) \cdot \vec{e}_\ell + c^{te}$

$= -\left(m/2 + M \right) g \ell \cos\theta + c^{te}$

13. $\mathcal{E}_k (T + \mathcal{D}) = \mathcal{E}_k (T) + \mathcal{E}_k (\mathcal{D})$

$= \frac{1}{2} \vec{L}(T) \cdot \vec{\Omega}_{T/R} + \underbrace{\mathcal{E}_k^* (\mathcal{D}) + \frac{1}{2} M \vec{v}_{C/R}^{\,2}}_{\text{Koenig.}}$

$= \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + \left(\frac{1}{4} M r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} M \ell^2 \dot{\theta}^2 \right)$

14. $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$

15. $\mathcal{E}_m$ se conserve car $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt}$ = puissance de fces Non Cons

= puissance des actions en O

= 0 car liaison parfaite en O

16. $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \rightarrow +\left(\frac{m}{2} + M \right) g \ell \sin\theta \cdot \dot{\theta} + \frac{1}{3} m \ell^2 \ddot{\theta} \dot{\theta} + M \ell^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = 0$

soit $\ddot{\theta} \left(m/3 + M \right) \ell^2 + \left(\frac{m}{2} + M \right) g \ell \sin\theta = 0$

$$\boxed{\ddot{\theta} + g/\ell \, \frac{m/2 + M}{m/3 + M} \cdot \sin\theta = 0}.$$